Teoria delle scelte razionali in condizioni di incertezza

Andrea Bigano
Microeconomia 1s
Scienze Statistiche ed Economiche - Università Milano-Bicocca
A.A. 2007-2008

Scelta in condizioni di incertezza

- La scelta in condizioni di certezza verteva su differenti beni (o panieri di beni). Non vi era incertezza sul risultato della scelta
- La scelta in condizioni di incertezza verte su differenti distribuzioni di probabilità di possibili realizzazioni di variabili casuali (in genere dotazioni di beni o trasferimenti di ricchezza)
- Date due situazioni casuali L_1 e L_2 in genere siamo in grado di di dire quale preferiamo; possiamo avere preferenze razionale e continue su tali situazioni casuali
- In questo caso possiamo definire una funzione di utilità che rappresenti preferenze su situazioni casuali U(L) tale che $L_1 \succ L_2$ se e solo se $U(L_1) > U(L_2)$
- In particolare vorremo essere in grado di definire le preferenze di una persona su situazioni casuali in termini dell'utilità che otterrebbe se ciascuna realizzazione degli eventi casuali possibili avvenisse con certezza ed in termini delle probabilità associate, ad esempio

	Viaggio alle Bahamas	-500€	Pulite casa mia
A	0.3	0.4	0.3
B	0.2	0.7	0.1

- Chiamiamo u_B, u_d, u_p le utilità assegnate ai tre possibili eventi qualora fossero certe
- Siamo interessati a capire sotto quali condizioni possiamo sintetizzare l' utilità associate alle alternative A e B come

$$U(A) = 0.3u_B + 0.4u_d + 0.3u_p$$

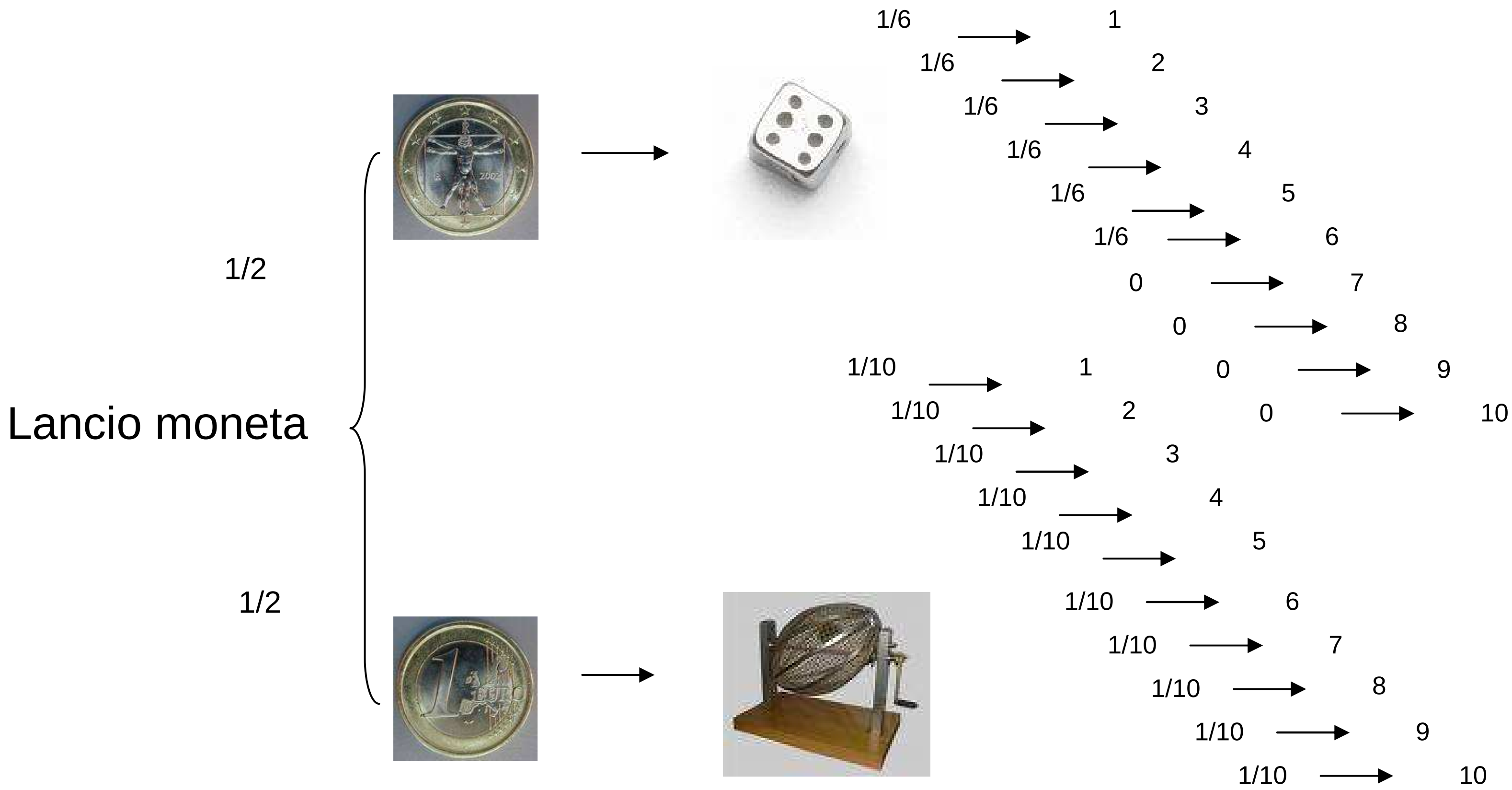
$$U(B) = 0.2u_B + 0.7u_d + 0.1u_p$$ o, più in generale

$U(L) = p_B u_B + p_d u_d + p_p u_p \leftarrow$ "expected utility form" o Utilità di von Neumann Morgenstern (vNM)

- Sotto quale condizioni le preferenze razionali su alternative incerte di un consumatore possono essere rappresentate come una funzione di utilità attesa con vNM?

Lotterie

- Nella teoria delle scelta in condizioni di certezza l'unità oggetto di scelta era il paniere x. Nel caso delle scelte in condizione d'incertezza, le unità oggetto di scelta sono dette **lotterie**.
- Una lotteria è una distribuzione di probabilità su un insieme di possibili risultati. Supponiamo vi siano N possibili risultati, $a_1, ..., a_N$. Sia $A = \{a_1, ..., a_N\}$ l'insieme dei possibili risultati.
- Una **lotteria semplice** è un vettore $L = (p_1, ..., p_N)$ tale che $p_n \geq 0$ per n = 1, ..., N , e $\sum_n p_n = 1$.
- Una **lotteria composta** è una lotteria che ha per risultati altre lotterie. Esempio



A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)   L =
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},0,0,0,0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{20},\frac{1}{20},\frac{1}{20},\frac{1}{20}\right),$$

= probabilità di A prima del lancio!

Lotterie composte

Una **lotteria composta** è una lotteria che ha per risultati altre lotterie. In genere può essere rappresentata come segue

Supponiamo K lotterie, L_1, ..., L_K. Sia Q una lotteria i cui premi sono le lotterie L_1, ..., $L_{K.}$ Q assegna L_k con probabilità q_k con $q_k \geq 0$ e $\sum_k q_k = 1$. se p_k^n è la probabilità che L_k assegna al risultato n, la lotteria composta può essere ridotta ad una lotteria semplice che assegna probabilità p_k^n al risultato n

$$p_n = \sum_k q_k p_n^k$$

Nel caso di due lotterie, L e L' una lotteria composta su queste due lotterie può essere rappresentata come aL + (1 − a) L', dove $0 \leq a \leq 1$ è la probabilità che si realizzi la lotteria L.

Preferenze razionali e continue su lotterie

- Caratterizziamo le preferenze razionali sullo spazio delle possibili lotterie $\tilde{L}$.
- Sappiamo che se abbiamo preferenze razionali possiamo descriverle con una funzione di utilità
- Individuiamo le condizioni sotto le quali tale funzione di utilità è vNM
- Supponiamo quindi che le preferenze sullo spazio delle lotterie siano **transitive e complete**
- Supponiamo che valga la proprietà di riduzione delle **lotterie composte**: cioè che il consumatore sia interessato solo alla distribuzione di probabilità dei risultati finali delle lotterie, indipendentemente dal fatto che vengano da lotterie semplici o composte; in altre parole, il consumatore è indifferente tra due lotterie composte che possano essere ridotte alla stessa lotteria semplice
- Supponiamo che le preferenze siano **continue** sulle probabilità: se, data una relazione di preferenza tra due lotterie, si aggiunge ad una di esse un probabilità piccola a piacere che si realizzi un'altra lotteria , la relazione di preferenza originaria resta invariata: esistono dei valori di a>0 tali che se

$$L \succ L', \qquad L \succ (1-a)\,L' + aL''$$

$\succsim$ è continua su $\tilde{L}$ se per ogni L, L' e L'' ed ogni $a \in (0,1)$. sono chiusi gli insiemi

$$\{a \in (0,1)\,|L \succsim (1-a)\,L' + aL''\} \qquad \{a \in (0,1)\,|\,(1-a)\,L' + aL'' \succsim L\}$$

NB. Non per tutte le lotterie la continuità delle preferenze è una proprietà ragionevole!

Ma se abbiamo preferenze razionali e continue, esiste una funzione di utilità U(L) che le descrive.

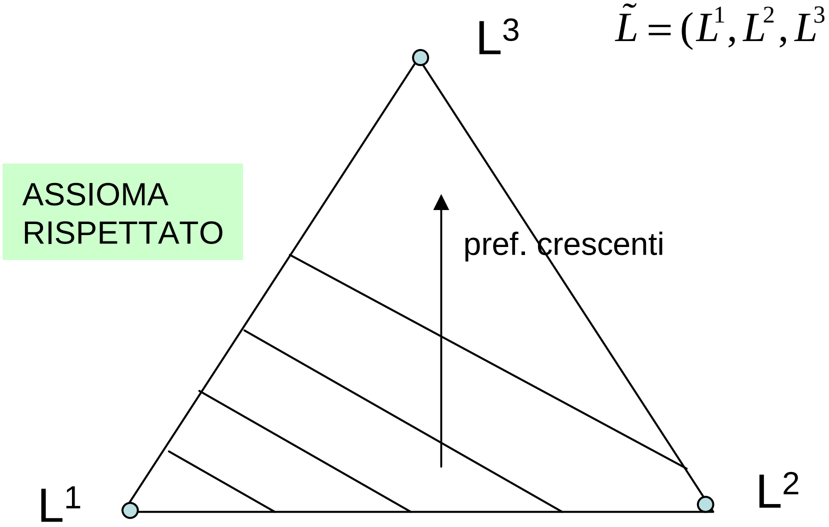
L' assioma di indipendenza delle preferenze

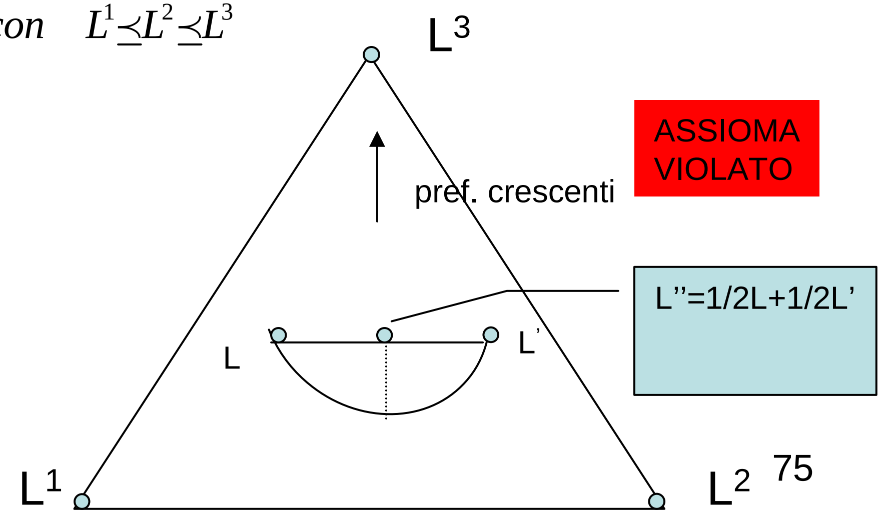
- Una relazione di preferenza soddisfa l'assioma di indipendenza su $\tilde{L}$ se per ogni L, L' e L'' ed ogni $a \in (0,1)$, $L \succsim L'$ se e solo se $aL + (1-a)L'' \succsim aL' + (1-a)L''$.
- L'assioma è in genere interpretato come indipendenza delle scelte dalle alternative irrilevanti. E' utile ma è controverso.
- Esempio in cui l' assioma è plausibile:
  - L : \$5 con probabilità 1/5 , 0 con probabilità 4/5
  - L' : \$12 con probabilità 1/10, 0 con probabilità 9/10.
  - L'': scegliete tra L e L' con probabilità 1/2, 0 con probabilità ½

La vostra scelta tra L e L' deve essere indipendente da L'': $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}0 \succsim \frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}0$.

L' indipendenza implica curve d'indifferenza lineari e parallele nel simplesso (spazio delle combinazioni lineari) delle lotterie. Supponiamo

$$\tilde{L} = (L^1, L^2, L^3) \quad con \quad L^1 \preceq L^2 \preceq L^3$$





L'assioma di indipendenza delle preferenze: paradossi

- Esempio in cui l' assioma non è plausibile ("**paradosso di Allais**": rimpianto e scarsa distinguibilità):

	$2.5M	$0.5M	$0
L_1	0	1	0
L'_1	.1	.89	.01

	$2.5M	$0.5M	0
L_2	0	0.11	0.89
L'_2	.1	0	.9

è frequente (50/100) che le persone preferiscano L_1 a L'_1 e L'_2 a L_2. Ciò è in contrasto con l' assioma di indipendenza. Infatti si considerino queste lotterie: L_A= (0,1,0), L_B= (10/11,0,1/11), L_c=

$$L_1 = 0.89L_A + 0.11L_A$$
$$L'_1 = 0.89L_A + 0.11L_B.$$

$$L_2 = 0.11L_A + 0.89L_C$$
$$L'_2 = 0.11L_B + 0.89L_C.$$

Quindi, per l' assioma L_1 dovrebbe essere preferita a L'_1 quando L_A è preferita a L_B, ma se questo vale, anche L_2 dovrebbe essere preferita a L'_2 !

- **Paradosso di Machina (**disappunto**)**

$L^B \succ L^{FB} \succ L^0$ ma può succedere che

$L' \succ L$ pur essendo

$$L' = .01L^B + .99L^{FB} + 0L^0 = .01L^B + .99L^{FB}$$
$$L = .01L^B + 0L^{FB} + .99L^0 = .01L^B + .99L^0$$

	Viaggio alle Bahamas (B)	Film sulle Bahamas (FB)	Niente (0)
L	0.01	0.99	0
L'	0.01	0	0.99
L^B	*1*	*0*	*0*
L^{FB}	*0*	*1*	*0*
L^0	*0*	*0*	*1*

Il teorema dell' utilità vNM - I

- Definizione: una funzione di utilità ha la forma della utilità attesa vNM se esistono dei numeri reali $u_1, \ldots, u_N$ tali che per ogni lotteria semplice $L = (p_1, \ldots, p_N)$, $U(L) = \sum_n p_n u_n$.

- Lemma: Una funzione di utilità ha la forma della utilità attesa se e solo se è lineare cioè se per qualsiasi K lotterie

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} t_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} t_k U(L_k)$$

  – se è lineare ha la forma dell'utilità attesa. Sia L_n la lotteria cha da a_n con probabilità 1, e sia U(L) lineare.

$$U(L) = U\left(\sum_n p_n L^n\right) = \sum_n p_n U(L^n) = \sum_n p_n u_n$$

  – se ha la forma dell'utilità attesa è lineare supponiamo che U(L) abbia la forma dell'utilità attesa. Consideriamo la lotteria composta $\sum_{k=1}^{K} t_k L_k$

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} t_k L_k\right) = \sum_n u_n \left(\sum_{k=1}^{K} t_k p_n^k\right) = \sum_{k=1}^{K} t_k \left(\sum_n u_n p_n^k\right) = \sum_{k=1}^{K} t_k U(L_k).$$

- Quindi per provare che una funzione ha la forma dell' utilità attesa basta provare che è lineare.

Il teorema dell' utilità attesa vNM -II

- Teorema: se una relazione di preferenza $\succsim$ razionale, continua, soddisfa la proprietà di riduzione delle lotterie composte e l'assioma di indipendenza sullo spazio delle lotterie semplici $\tilde{L}$. Allora $\succsim$ ammette una funzione di utilità U(L) della forma dell'utilità attesa. Cioè esistono N numeri $u_1, \ldots, u_N$ tali che $U(L) = \sum_n p_n u_n$ e per qualsiasi coppia di lotterie L e L'

  $L \succsim L'$ se e solo se $U(L) \geq U(L')$

- Dimostrazione. Supponiamo che ci sia un "primo premio" a_B ed un ultimo premio a_w .Sia L^B la lotteria che assegna a_B con probabilità 1 e L^W la lotteria che assegna a_W con probabilità 1. Sia L tale che $L^B \succ L \succ L^W$. Allora esiste a_L tale che $a_L L^B + (1 - a_L) L^W \sim L.$

  Sia $U(L)=a_L$; quindi $U(L^B)=1$ e $U(L^W)=0$. Dobbiamo dimostrare che U(L) è lineare, cioè

-

$$U(tL + (1-t)L') = ta_L + (1-t)a_{L'}$$

Ora $L \sim a_L L^B + (1-a_L) L^W$ $L' \sim a_{L'} L^B + (1-a_{L'}) L^W$

$$\begin{aligned} & U(tL + (1-t)L') \\ = \; & U\left(t\left(a_L L^B + (1-a_L)L^W\right) + (1-t)\left(a_{L'} L^B + (1-a_{L'})L^W\right)\right) && \longleftarrow \text{indipendenza} \\ = \; & U\left(\left(ta_L + (1-t)a_{L'}\right)L^B + \left(1 - \left(\left(ta_L + (1-t)a_{L'}\right)\right)\right)L^W\right) && \longleftarrow \text{riduzione} \\ = \; & ta_L + (1-t)a_{L'} \end{aligned}$$

per la definizione U(L): questa è la probabilità che rende indifferente la lotteria composta su (L^B, L^W) e la lotteria $L^\circ = tL + (1-t)L'$. Quindi U(L) è lineare , quindi è VNM.

Il teorema dell’utilità attesa vNM -III

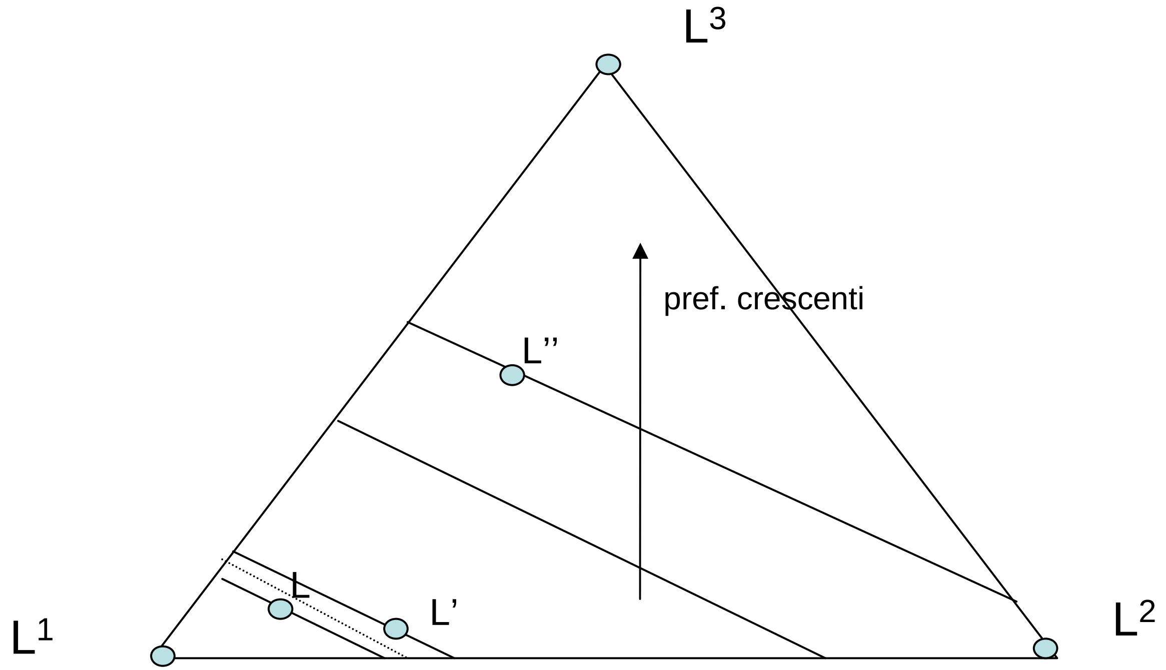
- Il teorema dice che sotto determinate condizioni esiste una funzione di utilità vNM che rappresenta delle preferenze date; tuttavia ci possono essere altre funzioni di utilità non –vNM che rappresentano le stesse preferenze
- Qualsiasi trasformazione monotona della funzione vNM individuata rappresenta le stesse preferenze: V(U(L)) con V’>0 rappresenta le stesse preferenze.
- Tuttavia, non è detto che V (U(L)) siano vNM a sua volta. esempio $V=e^u$. V(U (L)) $=\exp(\sum_n p_n u_n)$ non è vNM.
- Le sole trasformazioni monotone che restano vNM sono le trasformazioni lineari positive:
- **Se U() e V() sono funzioni di utilità entrambe rappresentanti una data relazione di preferenza, e U() è vNM, allora v() è vNM se e solo se esistono numeri a reali a>0 e b tali che V(L)=aU(L)+b.** (Dimostrazione su MWG)
- Corollario importante: vNM impone un significato cardinale alla funzione di utilità. Consideriamo i livelli di utilità associati a quattro premi: u_1, u_2, u_3, u_4. Applichiamo una trasformazione lineare positiva: $v_n=au_n+b$. Abbiamo

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= au_1 + b - (au_2 + b) = a(u_1 - u_2) \\ &> a(u_3 - u_4) = au_3 + b - (au_4 + b) = v_3 - v_4. \end{aligned}$$

- Ne segue che $v_1-v_2>v_3-v_4$ se e solo se $u_1-u_2>u_3-u_4$

Il teorema dell’utilità attesa vNM come guida alle decisioni

- Il teorema dice che, sotto determinate condizioni, esiste una funzione di utilità vNM che rappresenta delle preferenze date; quindi mi consente di associare un livello di utilità a qualsiasi lotteria riconducibile allo spazio delle lotterie
- Supponiamo che ci siano due lotterie molto vicine tra di loro ma diverse, L e L’ (come nel paradosso di Allais) e io non sappia capirne la differenza; e che vi sia un’ altra lotteria L’’ che io so di preferire ad entrambe,



Siccome so di preferire L’’ a L’ e L’’ a L, se U () è vNM, so anche che esiste una curva di indifferenza che separa L e L’ . Quindi so che non posso essere indifferente tra le due . Inoltre so che se U(L’) – U(L’) < U(L’’) - U(L), U(L’) > U(L) e quindi preferisco L’ a L.

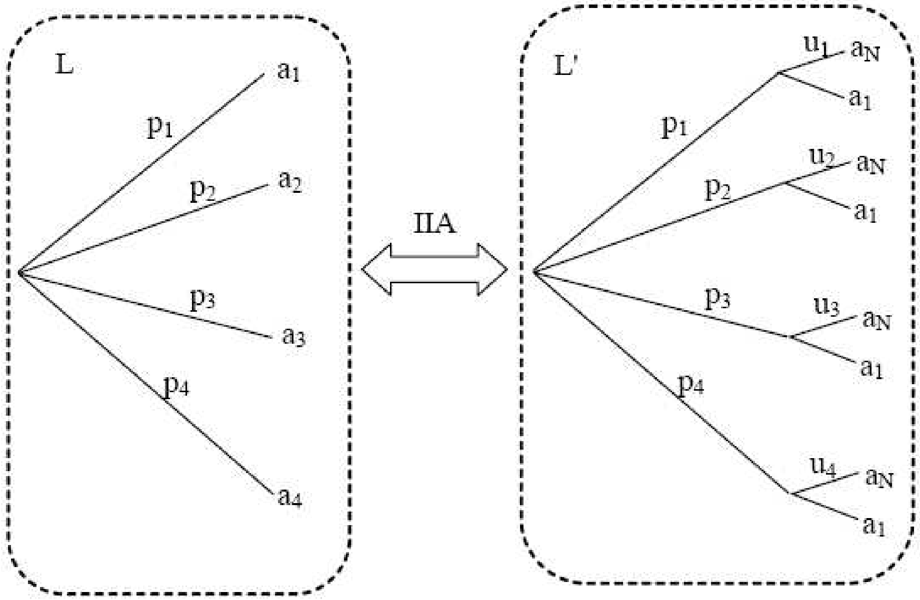
Costruzione di una funzione di utilità attesa vNM

Sia $A=(a_1,\ldots,a_N)$ l'insieme dei premi dove a_1 è il premio più basso e a_N è il primo premio.

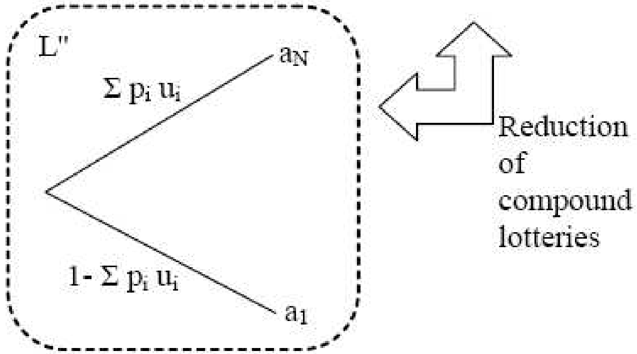
Come si costruiscono $u_1,\ldots,u_N$ che costituiscano un funzione vNM che rappresenti le preferenze su tali premi?

Assegniamo arbitrariamente $u_1= 0$ e, $u_N =1$. Per ogni a_i sia u_i la probabilità tale che il decisore sia indifferente tra a_i e una lotteria S_i che offre a_n con probabilità u_i e a_1 con probabilità $(1- u_i)$.

Usando la riduzione delle lotterie e l'assioma d'indipendenza possiamo definire una funzione $U(L)=\sum p_i u_i$.



$U(L'')=(\sum p_i u_i)\, u_N + (1-\sum p_i u_i)\, u_1 = U(L') = U(L)= \sum p_i u_i$.



Premi in denaro – VNM su premi continui (utilità di Bernoulli)

- Quasi sempre gli esiti di situazioni incerte sono riconducibili ad un valore monetario. Sia x una varabile continua che rappresenta l'ammontare di denaro ricevuto
- Quando gli esiti erano in numero finito, assegnavamo u_n ad ogni esito. Per una variabile continua u_x rappresenta il numero assegnato alla lotteria che da utilità x con probabilità 1. Ci sarà un solo valore u_x per ogni x. Quindi ci sarà una funzione u(x) che avrà lo stesso ruolo di u_n del caso discreto
- La descrizione delle probabilità deve essere adattata al caso continuo. In particolare, una lotteria è rappresentabile come una distribuzione di probabilità sugli esiti. Una funzione di densità di probabilità (pdf) è definita come

$$\Pr(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- L'utilità attesa (utilità di Bernoulli) è data da $$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x)\, dx,$$
- La funzione di distribuzione di probabilità cumulata (cdf) è $$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx.$$
- In termini di CDF l'utilità attesa (utilità di Bernoulli) è data da $$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dF(x)$$

Tassonomia delle attitudini verso il rischio

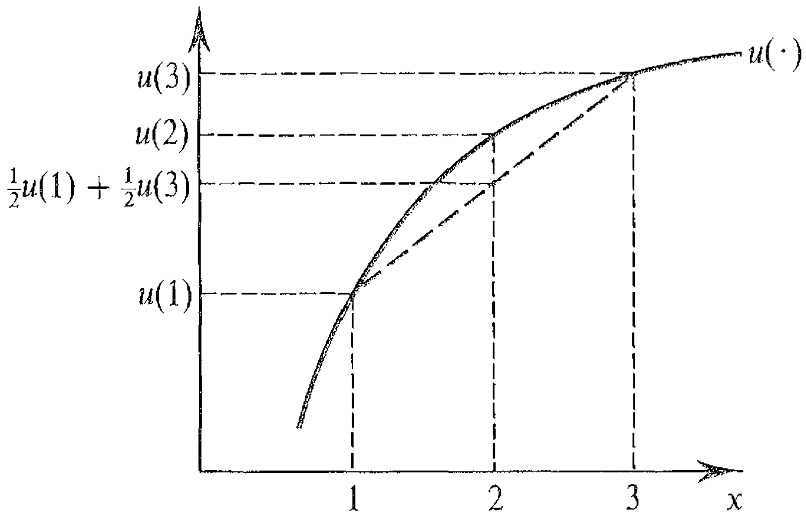
- Equivalente a certezza $$u\left(c\left(F,u\right)\right)=\int u\left(x\right)dF\left(x\right)$$
- Premio al rischio $$\int xdF(x)-c(F,u)$$
- Avversione al rischio $$\begin{cases}\int u\left(x\right)dF\left(x\right)\leq u\left(\int xdF\left(x\right)\right)\\ \int xdF(x)\geq c(F,u)\end{cases}$$
- Amore del rischio $$\begin{cases}\int u\left(x\right)dF\left(x\right)\geq u\left(\int xdF\left(x\right)\right)\\ c\left(F,u\right)\geq\int xdF\left(x\right)\end{cases}$$
- Neutralità al rischio $$\begin{cases}\int u\left(x\right)dF\left(x\right)=u\left(\int xdF\left(x\right)\right)\\ c\left(F,u\right)=\int xdF\left(x\right)\end{cases}$$

Avversione al rischio

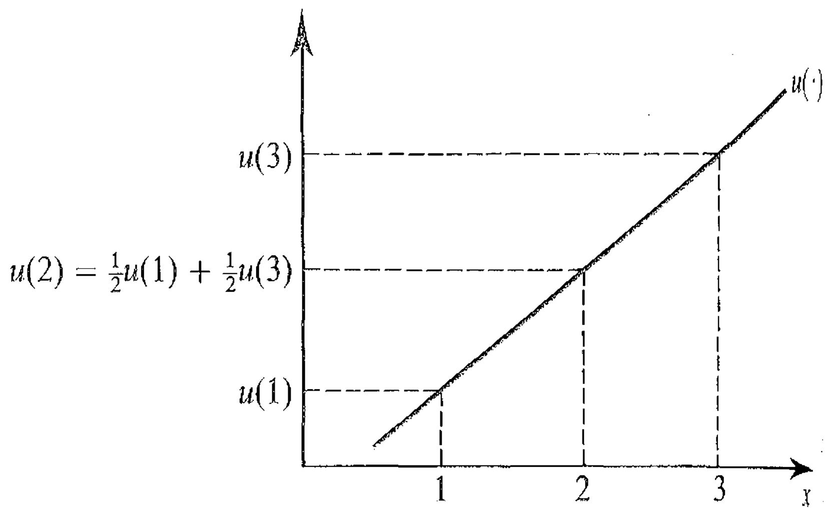
- Molte funzioni di utilità non sono rappresentabili da questa tassonomia: possono mostrare avversione al rischio, amore del rischio e neutralità al rischio a seconda delle lotterie. Tuttavia l'avversione al rischio (o al limite la neutralità al rischio) è l'attitudine più naturale (più frequente) fra le persone.
- L'avversione al rischio implica la stretta concavità della funzione di utilità Bernoulliana, grazie alla disuguaglianza di Jensen per la quale h() è concava se e solo se

$$\int h(x)\,dF(x) \leq h\left(\int x\,dF(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \int u(x)\,dF(x) \leq u\left(\int x\,dF(x)\right)$$

- Analogamente amore per il rischio implica funzione di utilità strettamente convessa, e neutralità al rischio implica funzione di utilità lineare.

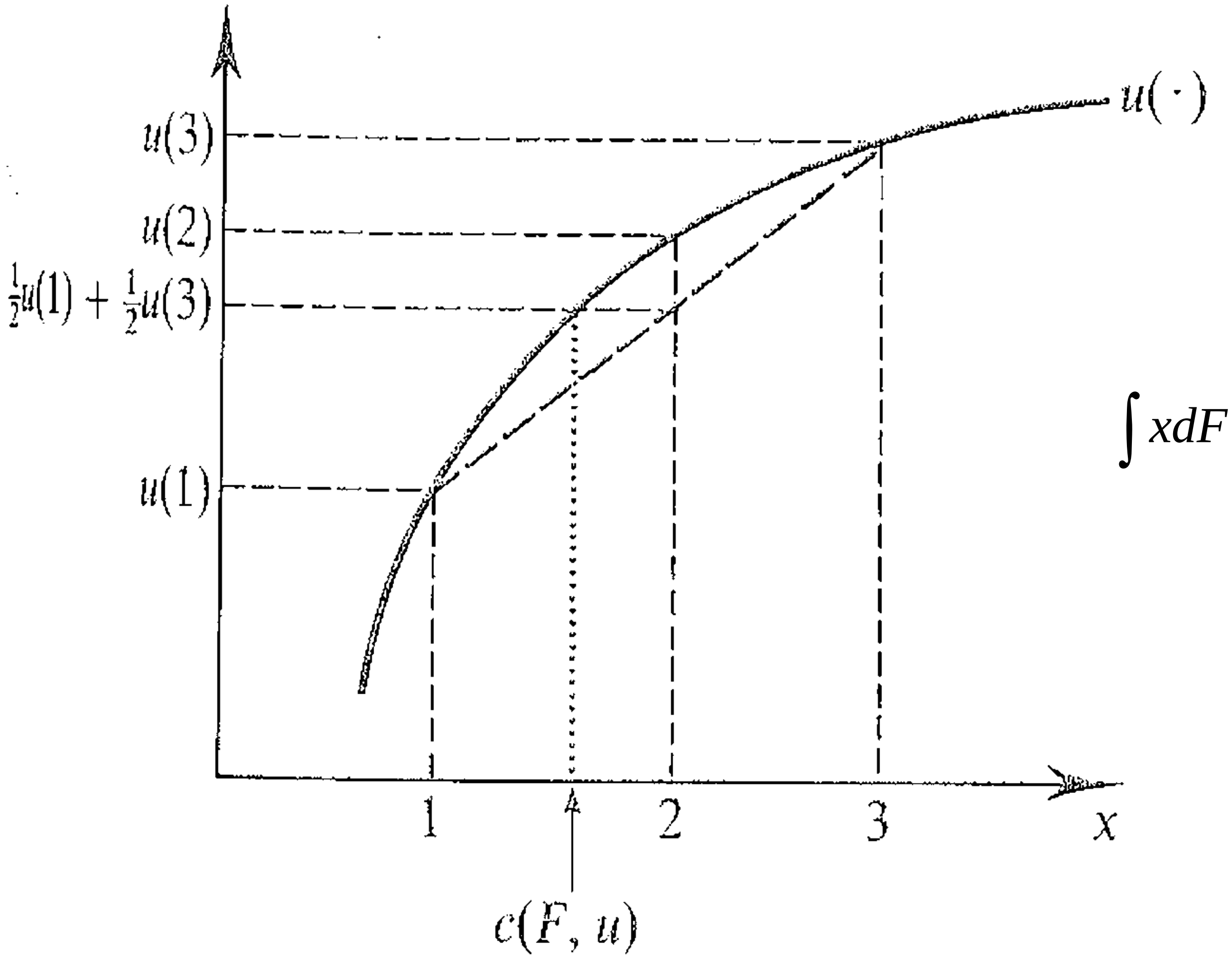


(a)



(b)

Avversione al rischio – equivalente a certezza



$$\int x dF(x) \geq c(F,u)$$

Misurare l'avversione al rischio - I

- L'avversione al rischio implica la stretta concavità della funzione di utilità. Quindi si potrebbe pensare che "maggiore avversione al rischio" è indicata da maggiore concavità, e quindi usare la derivata seconda per questi confronti. Ciò è vero, ma non permette misure univoche, perché non è invariante alle trasformazioni lineari.

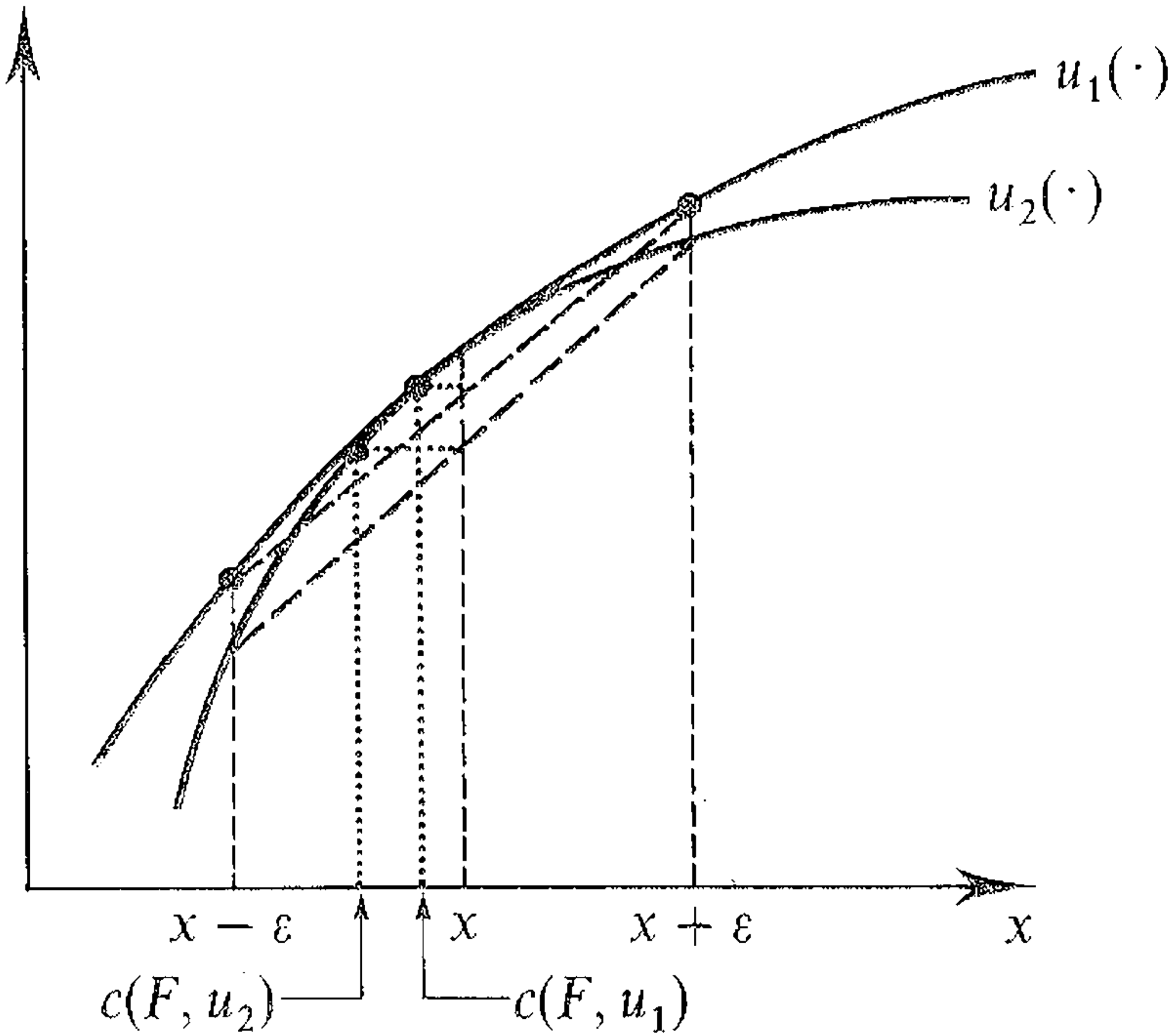
- Supponiamo che per ogni $|u_1''()| > |u_2''()|$.

- Consideriamo la funzione di utilità u_1 (x), e applichiamo la x trasformazione lineare $u_2() = au_1() + b$, dove a > 1. Sappiamo che le trasformazioni lineari positive lasciano le preferenze e quindi l'attitudine all'rischio invariate, ma $u''_2 () = au''_1() > u''_1()$. Quindi se usassimo questo criterio avremmo che $u_2()$ è più avversa al rischio di $u_1()$ anche se esprime le stesse preferenze.

- La soluzione è normalizzare per la derivata prima $$\frac{u_2''()}{u_2'()} = \frac{au_1''()}{au_1'()} = \frac{u_1''()}{u_1'()}$$
-
- Questo fornisce una misura dell'avversione al rischio invariante alle trasformazioni lineari.
- L' indicatore di Arrow-Pratt di avversione al rischio assoluta, per una funzione di utilità di Bernoulli differenziabile due volte, è
$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- r_A è>0 per un individuo avverso al rischio, =0 per chi è neutrale, >0 per chi ama il rischio.

Misurare l'avversione al rischio - II



Misurare l'avversione al rischio - III

Per confrontare il grado di avversione (assoluta) al rischio possiamo usare diversi criteri. $u_2(x)$ è almeno altrettanto avversa al rischio di $u_1(x)$ se

1. c (F, u_2) ≤ c (F, u_1) per ogni F
2. r_A (x, u_2) ≥ r_A (x, u_1)
3. u_2 () = g (u_1 (x)), dove g () è crescente concava
4. Partendo da una ricchezza iniziale x°, qualsiasi scommessa preferita alla ricchezza iniziale sotto u_2 lo è anche sotto u_1: se

$$u_2(x_0) \leq \int u_2(x)\,dF(x) \longrightarrow u_1(x_0) \leq \int u_1(x)\,dF(x)$$

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

è funzione di x, cioè della ricchezza. E' più probabile che l'avversione al rischio diminuisca o cresca con il crescere della ricchezza?

Si dice che u(x) ha *avversione assoluta al rischio non-crescente* se r_A è non-crescente nella ricchezza (x). Sia z una variabile casuale con distribuzione cumulata F e media 0. Se definiamo l' equivalente a certezza come

$$u(c_x) = \int u(x+z)\,dF(z)$$

Se la funzione di utilità ha avversione al rischio assoluta non crescente, il premio al rischio x-c_x è decrescente in x. Per al funzione U(x)=-*exp(-αx), r_A = α è costante.

Misurare l’avversione al rischio - IV

$$r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

E’ l’indice di avversione al rischio *relativa* per scommesse espresse in termini di frazioni della ricchezza detenuta dagli individui. Sia $t>0$ una variazione proporzionale della ricchezza individuale. Data una funzione di utilità Bernulliana u(x), si possono valutare lotterie espresse in termini di variazioni proporzionali di x con la funzione $\hat{u}(t)=u(tx)$, dove la situazione relativa alla ricchezza iniziale corrisponde a t=1. Per piccole variazioni del rischio attorno a t=1, $r_A= -\hat{u}''(1)/\hat{u}'(1)$. cattura l’avversione al rischio. Ma $\hat{u}''(1)/\hat{u}'(1)= x\,\hat{u}''(x)/\hat{u}'(x)$, da cui r_R,

Se l’avversione al rischio relativa è non crescente, il consumatore diventa meno avverso al rischio rispetto a scommesse proporzionali alla ricchezza posseduta al crescere della ricchezza.

Questa è una proprietà più stringente della avversione al rischio assoluta decrescente: siccome $r_R(x,u) = xr_A(x,u)$,se l’avversione al rischio relativa è decrescente lo è anche quella assoluta, ma non è detto che valga viceversa: $r'_R(x,u) = xr'_A(x,u)+r_A(x,u)<0$ solo se $xr'_A(x,u)$ è “sufficientemente negativo”.

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

– $r_R(x, u)$ è decrescente in x.
– Quando $x_2<x_1$ $\grave{u}_2(t) = u(tx_2)$ è una trasformazione concava di $\hat{u} = u(tx_1)$
– Data F(t) su t> 0, l’equivalente a certezza definito da $$u(c_x) = \int u(tx)\,dF(x)$$

è tale che x/c_x è decrescente in x.

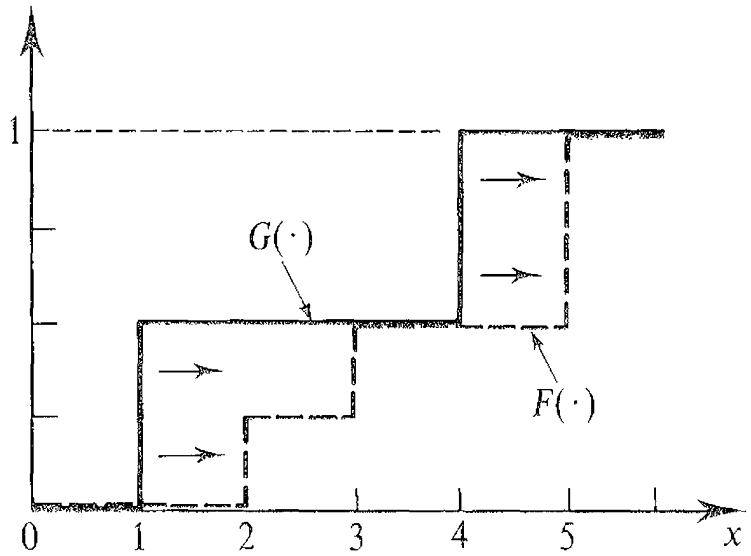
Confrontare distribuzioni: la dominanza stocastica - I

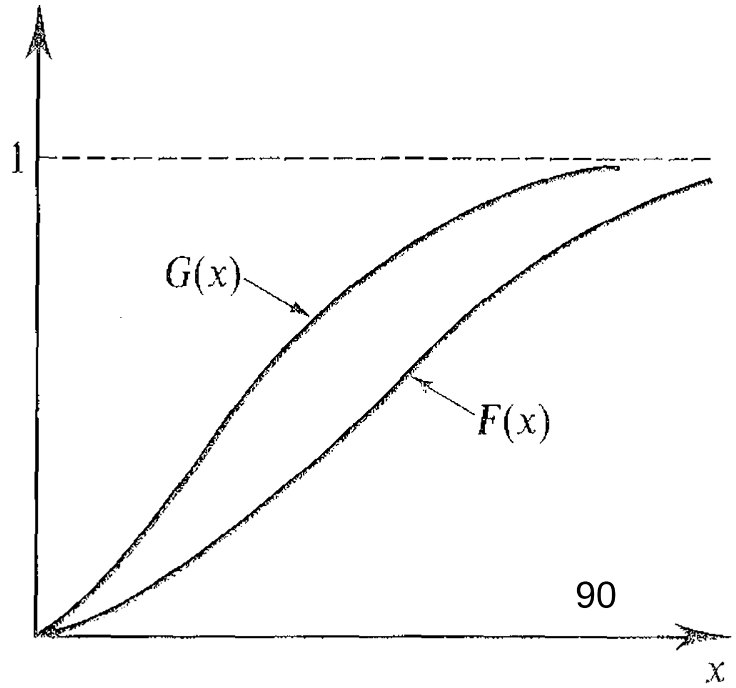
A meno di essere neutrali al rischio, di solito non siamo indifferenti tra due distribuzioni di probabilità, anche se danno lo stesso payoff atteso: Ad esempio quasi tutti preferiscono strettamente 100€ sicuri che 200€ con prob. 0.5 e 0€ con prob. 0.5.

Per confrontare l'utilità attesa di due distribuzioni si usa la *dominanza stocastica del prim'ordine*. Date due distribuzioni, F () e G (), F () ha dominanza stocastica del prim'ordine su G () se F (x) ≤ G (x) per ogni x. In pratica, il grafico di F(x) è sempre "sotto" quello di G(x)

Ogni consumatore con funzione di utilità strettamente crescente, preferisce F() a G().

$	G ()	F()
5	0	½
4	½	0
3	0	¼
2	0	¼
1	½	0





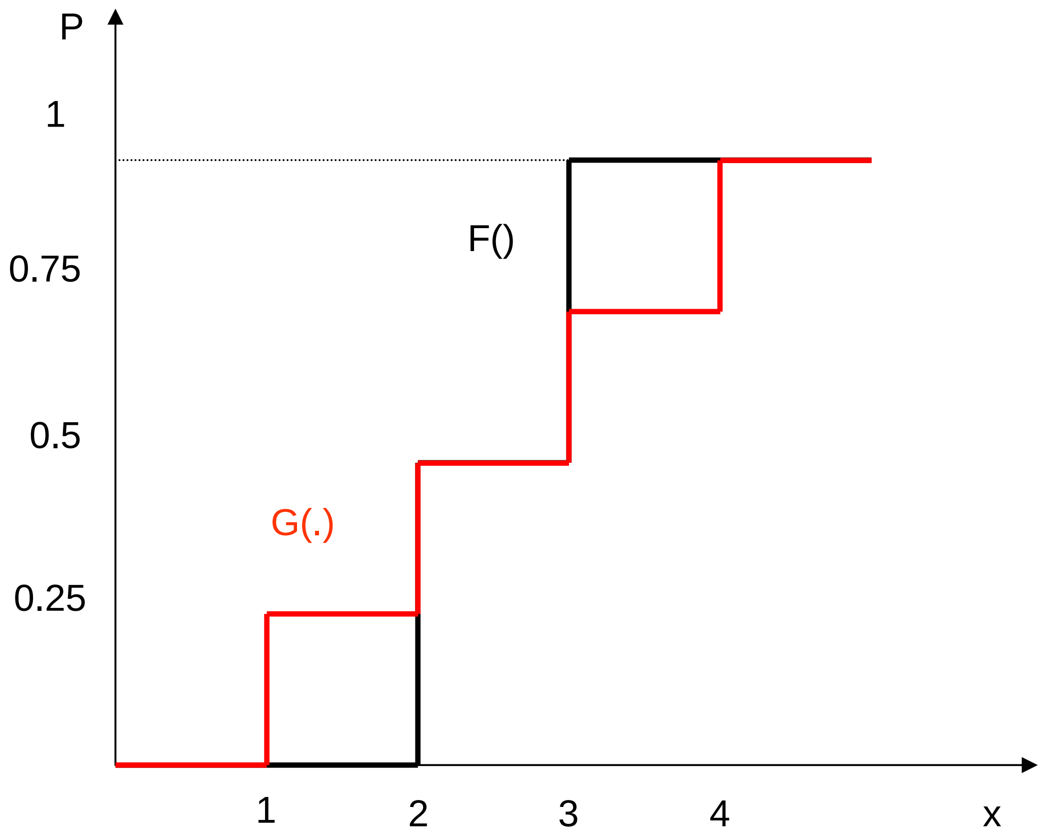
Confrontare distribuzioni: la dominanza stocastica - II

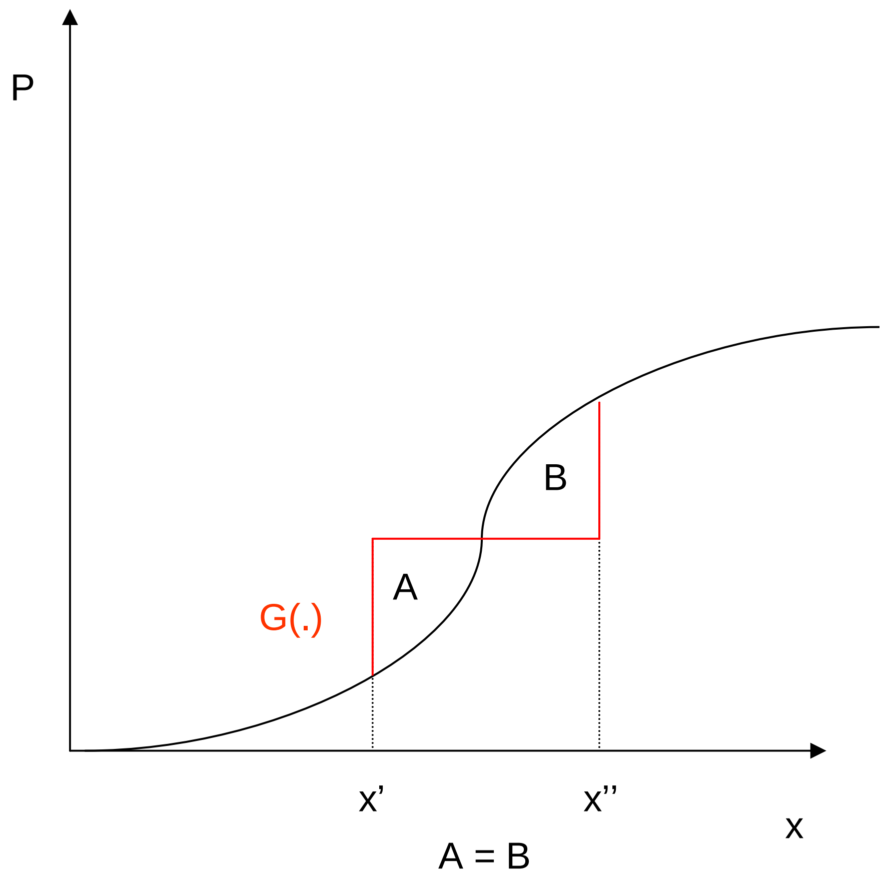
- La dominanza stocastica del prim'ordine permette di confrontare distribuzioni di probabilità quando il valore dei payoff cresce
- Per confrontare la rischiosità si usa la *dominanza stocastica del second'ordine.*
- Sia X una variabile casuale con distribuzione F(x). Sia z_x una variabile casuale con media 0 che aggiungiamo ad ogni valore di x. z_x è quindi il "rumore", la cui distribuzione dipende da quella di x ma ha sempre media 0. Consideriamo ora Y tale che $y = x + z_x$. la distribuzione di Y ha la stessa media di Y ma è più rischiosa. Se Y può essere derivata da X aggiungendo rumore come sopra, X mostra dominanza stocastica del second'ordine su Y
- E' intuitivo che qualsiasi consumatore avverso al rischio preferisce X a Y.
- In generale F() mostra dominanza stocastica del second'ordine su G(), se F() è strettamente preferita dai consumatori avversi al rischio. Formalmente, date due distribuzioni G() e F() con la stessa media, F() SOSD G(), se, per ogni funzione nondecrescente e concava,

$$\int u(x)\,dF(x) \geq \int u(x)\,dG(x)$$

Confrontare distribuzioni: la dominanza stocastica - III

- Mean-preserving spreads





Applicazioni: scegliere l'assicurazione - I

- Sia w la ricchezza del consumatore. Con probabilità π, il consumatore subisce un danno D. Con probabilità 1−π, non ci sono danni e w rimane invariata. Il consumatore può però comprare assicurazione. Ogni polizza costa q e copre 1€ di danni. Il consumatore compra *a* polizze. La ricchezza diventa ($w - D + a - qa$) con probabilità π e ($w - qa$) con probabilità 1 − π.
- L'assicurazione trasferisce ricchezza dallo stato del mondo in cui non avviene alcun danno a quello in cui avviene il danno.
- Il problema del consumatore è

$$\max_{a} \pi u\left(w - D + (1-q)a\right) + (1-\pi)u\left(w - aq\right)$$

- FOC

$$\pi(1-q)u'\left(w - D + (1-q)a^*\right) - (1-\pi)qu'\left(w - a^*q\right) = 0$$

- Assumiamo che il prezzo dell'assicurazione sia equo, cioè che il costo per il consumatore sia uguale al costo di risarcire il danno. Se l'assicurazione deve pagare 1€ con probabilità π, il prezzo equo è 1* π = π. Se q = π, FOC diviene

$$u'\left(w - D + (1-\pi)a^*\right) = u'\left(w - \pi a^*\right)$$

- Se il consumatore è strettamente avverso al rischio, u'(x) è strettamente decrescente, quindi, $w - D + (1-\pi)a^* = w - \pi a^*$, cioè $D = a^*$. Se il prezzo è equo, il consumatore sceglie di assicurarsi completamente.

Applicazioni: scegliere l'assicurazione - II

- Cosa succede se il prezzo non è equo ($q > \pi$)? FOC diventano

$$\begin{aligned}
\pi (1-q) u' (w - D + (1-q) a^*) - (1-\pi) q u' (w - q a^*) &= 0 \text{ if } D > a^* > 0, \\
\pi (1-q) u' (w - D) - (1-\pi) q u' (w) &\leq 0 \text{ if } a^* = 0, \\
\pi (1-q) u' (w - qD) - (1-\pi) q u' (w - qD) &\geq 0 \text{ if } a^* = D.
\end{aligned}$$

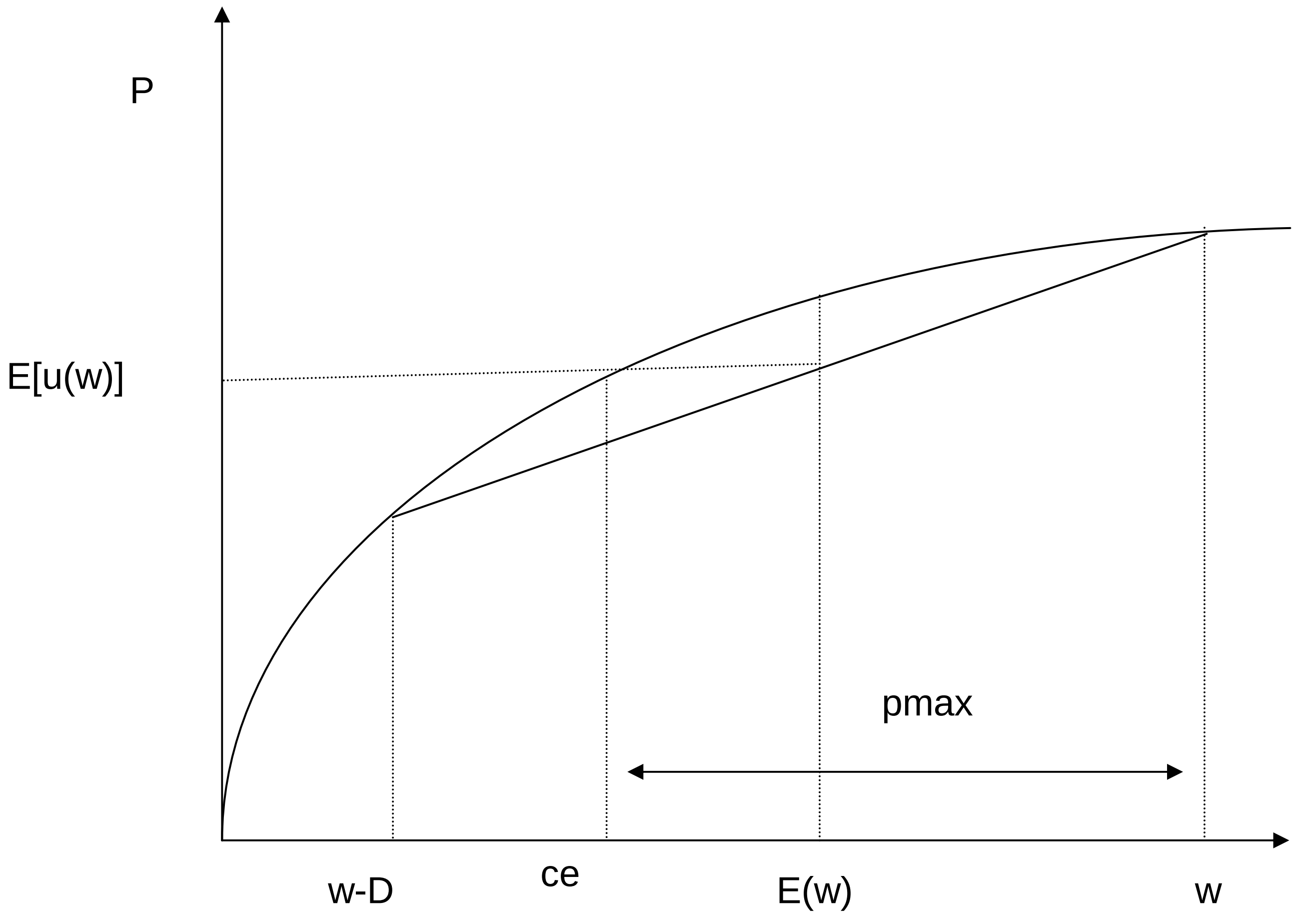
- Se $a^*=D$ FOC diventa

$$u' (w - qD) (\pi (1-q) - (1-\pi) q) = u' (w - qD) (\pi - q) \geq 0$$

- impossibile perché vero solo se $q < \pi$!
- Se il prezzo è equo, la copertura totale del danno costa πD. Se il consumatore si assicura completamente la sua ricchezza è $w - \pi D$ e la sua utilità attesa è $u(w - \pi D)$. se non compra alcuna assicurazione è invece $\pi u (w - D) + (1 - \pi) u (w)$. Se avverso al rischio, ciò è meno dell'utilità della ricchezza attesa $\pi (w - D) + (1 - \pi) w = w - \pi D$.
- Quindi $u (w - \pi D) > \pi u(w - D) + (1 - \pi) u(w)$
- Qant'è il massimo che il consumatore è disposto a pagare per essere assicurato, se l'alternativa è non avere assicurazione? Consideriamo l' equivalente a certezza

  $u (ce) = \pi u (w - D) + (1 - \pi) u (w) \rightarrow ce = w - pmax \rightarrow pmax = w - ce$

Applicazioni: scegliere l’assicurazione - III



Ex Ante vs. Ex Post Risk Management

Sia w la ricchezza del consumatore. Con probabilità π, il consumatore subisce un danno D. Con probabilità $1-\pi$, non ci sono danni e w rimane invariata. Il consumatore può però assicurarsi. Ogni polizza costa q e copre 1€ di danni. Abbiamo dimostrato che se il prezzo è equo, a*=D ed il consumatore si assicura completamente. Assicurarsi contro 1€ di danno costa π€.

Quindi rinunciando a π euro nello stato del mondo in cui ci non ci sono danni si ottengono $1-\pi$ nello stato in cui ci sono danni. Questo trasferimento di ricchezza tra i due stati del mondo lascia la ricchezza attesa costante:

$$\pi (w - D + (1 - \pi) a) + (1 - \pi) (w - \pi a)= w - \pi D.$$

Quindi il classico problema del consumatore esteso al caso dell'incertezza in presenza di mercati assicurativi perfetti si riduce all'allocazione del consumo tra i due stati del mondo mantenendo costante la spesa attesa $w - \pi D$.

$$\max_{c_D, c_N} \pi u (c_D) + (1 - \pi) u (c_N)$$

$$\text{s.t.} \quad \pi c_D + (1 - \pi) c_N \leq w - \pi D.$$

Supponiamo di dover scegliere tra due allocazioni di ricchezza $w = (w_D, w_N)$ e $w'=(w'_D, w'_N)$ scelgo w se $\pi w_L + (1 - \pi) w_N > \pi w'_L + (1 - \pi) w'_N$, w' se vale il contrario e scelgo uno qualsiasi dei due se il valore atteso è uguale.

Se non c'è possibilità di assicurazione tutto quello che si può fare è scegliere l'opzione meno rischiosa (*ex-ante risk management*). Se ci si può assicurare si sceglie l'opzione che dà migliori prospettive in termini attesi e ci si difende dal rischio con l'assicurazione (*ex-post risk management*). In genere questo aumenta il benessere a lungo termine.