Tecniche di copertura

- A tale scopo, il primo parametro da considerare è Δ. Si supponga di possedere un portafoglio Π composto dall'opzione e da una quantità pari a Δ del sottostante (dunque, ho venduto l'opzione e acquistato Δ quote del sottostante: il portafoglio è Δ-*neutral*).
- Tale portafoglio risulta perfettamente coperto; in generale però il prezzo del sottostante evolve in modo continuo e ciò implica che la copertura non è perfetta (lo è solo istantaneamente). Si noti che anche il passare del tempo modifica Δ.
- Si ipotizzi che la volatilità e il tasso *risk-free* siano costanti e si consideri l'espansione di Taylor della funzione di prezzo di un'opzione:

$$dC = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t} dS dt + \cdots . \tag{7}$$

Tecniche di copertura

- Per il portafoglio Π (ma anche, in generale, per un portafoglio contenente N opzioni sul medesimo sottostante) l'espansione di Taylor della funzione f è data da:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t} dS dt + \cdots \\ &= \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \Theta dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t} dS dt + \cdots . \end{aligned}$$

- Dunque, se Π è Δ-*neutral*, il primo termine a destra dell'uguale nella (7) è nullo. Tralasciando i termini di ordine superiore a dt, si ottiene quindi

$$d\Pi \approx \Theta dt + \frac{1}{2}\Gamma dS^2. \tag{8}$$

Tecniche di copertura

- Ne segue che, se ci si copre anche rispetto a Γ, la variazione del valore della posizione dipende solo dal passare del tempo, che è non stocastico.
- La (8) fornisce una stima dell'errore che si commette coprendosi solo rispetto a Δ. Si noti anche che si commette tale errore esclusivamente perché la funzione che esprime il prezzo dell'opzione in funzione del prezzo del sottostante è non lineare; se infatti fosse lineare, la derivata seconda (il parametro Γ) sarebbe nulla.

Tecniche di copertura

- Esempio. Il Gamma di un portafoglio Delta-neutral è pari a -10000. Sulla base della (8), un cambiamento (in un breve lasso di tempo) pari a $+2\$$ o a $-2\$$ del prezzo del sottostante provoca una diminuzione del valore del portafoglio approssimativamente pari a $0.5 \cdot 10000 \cdot (2\$)^2 = 20000\$$.
- Come ci si copre rispetto a Γ? L'unica possibilità è assumere una posizione in un'opzione. Si considerino infatti un portafoglio *Delta-neutral* con Gamma pari a Γ e un'opzione con Gamma pari a Γ_T. Se si aggiunge al portafoglio una quantità w_T di tali opzioni, il Gamma del portafoglio diventa $\Gamma + w_T \Gamma_T$. Bisogna trovare w_T tale che

$$\Gamma + w_T \Gamma_T = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w_T^* = -\frac{\Gamma}{\Gamma_T}.$$

- Dunque sono necessarie w_T^* opzioni per rendere il portafoglio *Gamma-neutral*.

Tecniche di copertura

- Esempio. Si supponga che un portafoglio *Delta-neutral* abbia $\Gamma = -3000$ e che un'opzione abbia $\Delta = 0.62$ e $\Gamma_T = 1.5$. Il portafoglio può essere reso *Gamma-neutral* includendo una posizione lunga di $w_T = 3000/1.5 = 2000$ opzioni. Ora però il Δ del portafoglio è $2000 \cdot 0.62 = 1240$; bisogna dunque vendere 1240 azioni del sottostante per rendere nuovamente *Delta-neutral* il portafoglio.
- In pratica, l'informazione fornita da Γ è utilizzata non tanto per coprirsi anche rispetto a questo parametro, quanto per stimare con quale frequenza deve essere "aggiornata" la copertura rispetto a Δ: quanto più grande è Γ, tanto più frequentemente deve essere aggiornata la copertura. Infine, sulla base della stessa logica, se si ipotizza che la volatilità e/o il tasso *risk-free* non siano costanti, bisogna coprirsi anche rispetto a Vega e ρ.

Risultato generale sul pricing risk-neutral

- L'approccio al *pricing* basato sull'individuazione di una misura di probabilità *risk-neutral* può essere esteso ad *asset* con dinamiche più complesse; il risultato più generale che può essere dimostrato è il seguente.
- Si consideri un derivato il cui *cash flow* alla scadenza è dato da $g(S_T)$, dove (S_t) è il sottostante, di cui si suppone che segua un processo markoviano. Sia C_t il prezzo del derivato al tempo t. La formula di *pricing* non può che essere del tipo:

$$C_t = e^{-r_{rf}(T-t)} E_{\pi^*}(g(S_T)|S_t),$$

dove E_{π^*} indica il valore atteso rispetto alla distribuzione di probabilità *risk-neutral* del sottostante; se il mercato è completo, tale distribuzione di probabilità è unica.

Un caso di studio: il fallimento della banca Barings

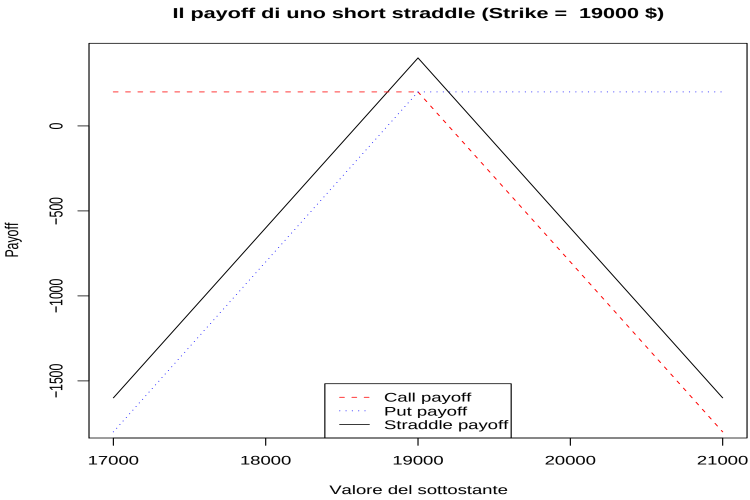
- La banca Barings fallì nel febbraio 1995, a causa di un'enorme posizione scoperta in derivati costruita dal responsabile dell'attività di *trading* della filiale di Singapore della banca, Nick Leeson (si veda, per esempio, `http://riskinstitute.ch/137560.htm`).
- Leeson costruì uno *short straddle* di circa 35000 opzioni *call* e altrettante *put* aventi come sottostante contratti *futures* sull'indice Nikkei. Lo *short straddle* è la combinazione della vendita di un'opzione *call* e un'opzione *put* con medesimi sottostante, *strike* e scadenza.
- Considerando che un contratto in opzioni corrispondeva a 500 Yen e che il tasso di cambio Yen/Dollaro era pari a circa 100, il controvalore dello *straddle* era di circa $2 \cdot 35000 \cdot 500/100 = 350000$\$.

Payoff a scadenza di uno short straddle

(*ipotizzando che* $C_t^c = C_t^p = C_t$)

Sottostante	Payoff call	Payoff put	Payoff straddle
$S_T \leq K$	C_t	$C_t - (K - S_T)$	$2C_t - (K - S_T)$
$S_T > K$	$C_t - (S_T - K)$	C_t	$2C_t - (S_T - K)$

Il *payoff* di uno *short straddle*



Un caso di studio: il fallimento della banca Barings

- Oltre allo *straddle*, Leeson costruì una grossa posizione lunga in futures sul Nikkei, che era a sua volta esposta a perdite potenzialmente illimitate nel caso di un calo dell'indice.
- La posizione divenne insostenibile a seguito del forte calo del Nikkei verificatosi tra gennaio e febbraio 1995, quando sia la posizione in *futures* sia lo *short straddle* accumularono perdite tali che la banca non riuscì a coprirle e fallì il 27 febbraio, quando l'indice Nikkei scese sotto quota 17000.
- Questo è un tipico caso in cui il *Delta hedging* può essere molto fuorviante. Infatti il Delta di uno *short straddle*, se entrambe le opzioni sono *at-the-money* e il tasso di interesse *risk-free* è "piccolo", è approssimativamente nullo.

Concetti fondamentali di risk management

Tutti i concetti della lezione odierna sono presi da McNeil, Frey, Embrechts (2005), *Quantitative Risk Management*, Princeton, Princeton University Press, cap. 2.

- Il *risk management* è la disciplina che si occupa della misurazione e gestione del rischio.
- Ha assunto particolare rilevanza in finanza sia per la frequenza e l'ammontare delle perdite, sia per la pressione delle autorità di vigilanza. I progressi nella misurazione del rischio sono stati inoltre resi possibili dallo sviluppo dell'IT.
- Riferimenti storici:
  - Il Comitato di Basilea è fondato nel 1974.
  - Il primo "accordo di Basilea" è emesso nel 1988.
  - Il VaR nasce nel 1993.
  - Nel 1996 il *First Amendment* al primo accordo di Basilea introduce la possibilità di calcolare internamente il VaR.

Concetti fondamentali di risk management

- Si distinguono principalmente tre tipi di rischio finanziario.
  (i) Rischio di mercato. E' il rischio di cambiamento di valore di una posizione dovuto a cambiamenti di valore dei sottostanti da cui la posizione dipende (prezzi di azioni od obbligazioni, tassi di cambio e di interesse, prezzi di *commodity*, ecc.).
  (ii) Rischio di credito. E' il rischio di: (i) non ricevere rimborsi promessi a fronte di investimenti già effettuati, quali prestiti od obbligazioni, a causa del fallimento (*default*) della controparte; (ii) variazioni dei prezzi di strumenti finanziari causati dalla variazione del merito di credito; (iii) perdita in caso di *default*.
  (iii) Rischio operativo. Rischio di perdite derivanti da processi o sistemi interni inadeguati o non andati a buon fine, da errati comportamenti di persone o da eventi esterni.

Perché gestire il rischio finanziario?

Perché gestire il rischio finanziario?

- Dal punto di vista della società civile: per assicurare uno sviluppo stabile ed ordinato dell'economia e della società; questa motivazione ha portato soprattutto al massiccio intervento delle autorità di vigilanza.
- Dal punto di vista degli azionisti: per incrementare il valore della banca.
- Le sfide:
  (i) stimare valori estremi. *From the point of view of the risk manager, inappropriate use of the normal distribution can lead to an understatement of risk, which must be balanced against the significant advantage of simplification. [...] Improving the characterization of the distribution of extreme values is of paramount importance*. (A. Greenspan, 1995)

Le sfide

(ii) La natura multivariata del rischio.
(iii) Gli aspetti computazionali.
(iv) L'interdisciplinarità: sono richieste competenze "quantitative" (statistica, matematica finanziaria e attuariale, econometria finanzaria, economia finanziaria) e "non quantitative" (capacità di comunicare, conoscenza di pratiche di mercato e dettagli istituzionali).

Fattori di rischio e distribuzione di perdita

- La perdita del portafoglio per il periodo $[s, s+\Delta]$ è data da

$$L_{[s,s+\Delta]} = -(V_{s+\Delta} - V_s).$$

  La distribuzione di tale quantità è la *distribuzione di perdita*. La quantità $-L_{[s,s+\Delta]}$ è il *Profit & Loss* (P&L).
- Il valore del portafoglio V_t è funzione del tempo e di un vettore aleatorio di fattori di rischio $\boldsymbol{Z}_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})'$:

$$V_t = f(t, \boldsymbol{Z}_t). \tag{9}$$

- I fattori di rischio sono diversi a seconda del tipo di rischio:
  (i) nel rischio di mercato, sono di solito rendimenti di strumenti finanziari, tassi di cambio e tassi di interesse;
  (ii) nel rischio di credito sono la Probabilità di *Default*, la *Loss Given Default* e la *Exposure at Default*;
- La scelta di f e di $\boldsymbol{Z}_t$ dipende da vari fattori: in particolare il tipo di portafoglio e la precisione desiderata.

La distribuzione di perdita

- La (9) è definita una *mappatura* dei rischi.
- Problema: bisogna assumere che la composizione del portafoglio sia costante nel tempo!
- La distribuzione di perdita può essere condizionata o non condizionata.
- La distinzione è collegata all'orizzonte temporale di riferimento: su orizzonti temporali brevi è più utile la distribuzione condizionata, per analisi di lungo periodo si ricorre di solito alla distribuzione non condizionata.
- La distribuzione non condizionata si ottiene come media delle distribuzioni condizionate su un orizzonte temporale lungo.
- Se i rendimenti sono *iid* , le due distribuzioni coincidono.

L'operatore perdita

- Sia $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_{t-1}$ la serie storica dei cambiamenti dei fattori di rischio e $F_{X_{t+1|t}}$ la distribuzione condizionata di $\boldsymbol{X}$ al tempo $t+1$ data tutta l'informazione disponibile al tempo t. La distribuzione condizionata di perdita è allora la perdita indotta dalla distribuzione $F_{X_{t+1|t}}$.
- Esempio. Se si ipotizza che la varianza dei fattori di rischio evolva secondo il modello $\sigma_t^2 = \alpha + \beta r_{t-1}^2$, la distribuzione di perdita al tempo $t+1$ è influenzata dal quadrato del rendimento al tempo t.
- L'operatore perdita è definito come:

$$l_t(\boldsymbol{x}) = -(f(t+1, \boldsymbol{Z}_t + \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{Z}_t)), \quad \boldsymbol{x} \in R^d.$$

Si noti che $L_{t+1} = l_t(\boldsymbol{X}_{t+1})$.

La distribuzione di perdita

- Se f è derivabile, l'approssimazione del primo ordine della perdita e l'operatore di perdita linearizzato sono:

$$L_{t+1}^{\Delta} = -\left(f_t(t, \boldsymbol{Z}_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t, \boldsymbol{Z}_t) X_{t+1,i} \right);$$

$$l_t^{\Delta}(\boldsymbol{x}) = -\left(f_t(t, \boldsymbol{Z}_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t, \boldsymbol{Z}_t) \boldsymbol{x} \right),$$

dove i deponenti t e Z_i indicano una derivata parziale.

Esempi di mappatura dei rischi.

- Portafoglio azionario. Sia $Z_{t,i} = \log(S_{t,i})$, dove $S_{t,i}$ è il prezzo dell'azione. Allora $X_{t+1,i} = r_{t+1,i}$, cioè i rendimenti logaritmici. Sia λ_i il numero di azioni del titolo i-esimo in portafoglio. Allora $V_t = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e^{Z_{t,i}}$. Quindi

$$L_{t+1} = -(V_{t+1} - V_t) = -\sum_{i=1}^{d} \lambda_i S_{t,i} (e^{X_{t+1,i}} - 1).$$

La perdita di un portafoglio azionario

- La perdita linearizzata è data da:

$$L_{t+1}^{\Delta} = -V_t \sum_{i=1}^{d} w_{t,i} X_{t+1,i},$$

  dove $w_{t,i} = (\lambda_i S_{t,i})/V_t$ dà la percentuale del valore del portafoglio investita nel titolo i al tempo t.
- Infine, l'operatore di perdita linearizzata è dato da $l_t^{\Delta}(\boldsymbol{x}) = -V_t \sum_{i=1}^{d} w_{t,i} x_i = -V_t \boldsymbol{w}_t' \boldsymbol{x}$.
- Se $E(\boldsymbol{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ e $cov(\boldsymbol{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$, abbiamo $E(l_t^{\Delta}(\boldsymbol{x})) = -V_t \boldsymbol{w}' \boldsymbol{\mu}$ e $var(l_t^{\Delta}) = V_t^2 \boldsymbol{w}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$.
- A seconda che valore atteso e matrice di covarianza di $\boldsymbol{X}$ siano calcolati sulla base della distribuzione condizionata o non condizionata di $\boldsymbol{X}$, si ottengono i primi due momenti della distribuzione di perdita condizionata o non condizionata del portafoglio.

La perdita di un'opzione

- (2) Opzione europea. Per un'opzione europea la funzione f non è altro che la formula di Black & Scholes. Benché nella formula si assuma che r_{rf} e σ siano costanti, in realtà non è così, quindi il vettore dei cambiamenti dei fattori di rischio è di solito dato da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{t+1} &= (X_{t+1,1}, X_{t+1,2}, X_{t+1,3})' = \\ &= (\log(S_{t+1}) - \log(S_t), r_{rf,t+1} - r_{rf,t}, \sigma_{t+1} - \sigma_t)'.\end{aligned}$$

- Posto $\Delta_t = (t+1) - t$, la perdita linearizzata è data da

$$L^{\Delta}_{t+1} = -(\Theta \Delta_t + \Delta X_{t+1,1} + \rho X_{t+1,2} + \Lambda X_{t+1,3}).$$

- Non si tratta di una buona approssimazione! E' preferibile l'approssimazione Delta-Gamma.

La perdita di un portafoglio crediti

- Supponiamo che un portafoglio crediti contenga N controparti, ognuna con esposizione η_i. L'orizzonte temporale Δ è tipicamente pari ad un anno. Per semplicità, supponiamo che tutti i prestiti siano rimborsati alla stessa data T. Sia

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{la controparte fallisce in } [0, T]; \\ 0 & \text{la controparte non fallisce in } [0, T]. \end{cases}$$

Come si tiene conto del rischio di *default* nel prezzare il prestito? Scontandolo ad un tasso più alto dello *yield* $y(s, T)$ relativo ad un *bond zero-coupon risk-free*:

$$p(s, T) = e^{-(T-t)y(t,T)+c_i(t,T)}\eta_i,$$

dove c_i è il *credit spread* del *bond* e si ipotizza $p(T, T) = 1$.

La perdita di un portafoglio crediti

- Ipotizziamo che $c_i(t,T) = c(t,T)\ \forall i = 1, \ldots, N$. Allora il valore del portafoglio è

$$V_t = \sum_{i=1}^{N} (1 - L_{t,i}) e^{-(T-t)y(t,T) + c(t,T)} \eta_i .$$

Quindi il vettore $\boldsymbol{Z}_t$ in questo caso potrebbe essere $\boldsymbol{Z}_t = (L_{t,1}, \ldots, L_{t,N}, y(t,T), c(t,T))'$.

- Data la lunghezza dell'orizzonte temporale, le perdite linearizzate sono poco importanti. La principale difficoltà è trovare la distribuzione congiunta delle v.c. $L_1, \ldots, L_N$.

La misurazione del rischio

Perché si misura il rischio?

- Per determinare il capitale regolamentare (riserve).
- Per gestire l'ammontare complessivo di rischio di un'unità all'interno dell'azienda.
- Per determinare premi assicurativi.

Possibili approcci:

- Approccio dell'ammontare nozionale.
- Misure di sensitività rispetto ai fattori di rischio: derivate prime di funzioni di prezzo (es.: Greche, *duration*).
- Misure basate su distribuzioni di perdita. Sono decisamente preferibili perché le distribuzioni di perdita:
  (i) sono il principale oggetto di studio del *risk management*;
  (ii) sono appropriate a qualsiasi livello di aggregazione;
  (iii) riflettono effetti di compensazione e diversificazione;
  (iv) possono essere stimate e paragonate su portafogli diversi.

Misure di rischio

- Sia $F_L(l)$ la funzione di ripartizione della distribuzione di perdita. Possiamo definire varie misure di rischio basate su tale distribuzione: la più usata è il *Value at Risk* (VaR).
- Il VaR è la massima perdita a cui è soggetto un portafoglio, con probabilità data, su un orizzonte temporale predefinito.
- **Definizione.** Dato un livello di confidenza $\alpha \in (0, 1)$, il VaR al livello di confidenza α è il numero VaR_α tale che la probabilità che la perdita L ecceda VaR_α sia uguale a $(1 - \alpha)$:

$$VaR_\alpha = k \in R : P(L > k) = 1 - \alpha.$$

- In termini probabilistici, il VaR è un quantile di L. Nel rischio di mercato, α è di solito uguale a 0.95 o 0.99 e l'orizzonte temporale è pari a 1 o 10 giorni; nel rischio di credito e operativo α è per lo più uguale a 0.99 o 0.999, e l'orizzonte temporale pari ad un anno.

Quantili

- **Definizione.** Un numero $x_0 \in R$ è il quantile α della distribuzione F se e solo se $F(x_0) = P(X \leq x_0) = \alpha$. Se F è continua, si ha $x_0 : \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \alpha$.

Come si calcolano i quantili?

- Per via analitica, cioè risolvendo analiticamente l'integrale.
- Per via numerica (deterministica), cioè risolvendo l'integrale con tecniche di analisi numerica.
- Tramite simulazione Monte Carlo. In quest'ultimo caso, si procede come segue:
  (i) si simulano B osservazioni da F;
  (ii) si ordinano le osservazioni in senso crescente;
  (iii) si calcola il quantile empirico, che è l'osservazione simulata x_0^* tale che α% delle osservazioni simulate è minore di x_0^* e $(1-\alpha)$% è maggiore di x_0^*.

VaR e quantili

- Esempio. Supponiamo $X \sim N(0, \sigma^2)$. Allora VaR_α è tale che $P(X \leq VaR_\alpha) = \alpha$. Sia $Z = X/\sigma$; allora $P(X \leq VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(Z \leq VaR_\alpha/\sigma) = \alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha/\sigma = z_\alpha$, dove z_α è il quantile α della normale standard. Quindi $VaR_\alpha = \sigma z_\alpha$.
- Il VaR è semplice da calcolare e fornisce rapidamente un'informazione di base sulla rischiosità della distribuzione. Soffre tuttavia di almeno due difetti:
  - (i) Siano L_1 e L_2 le distribuzioni di perdita di due portafogli. Sia $L = L_1 + L_2$ la distribuzione di perdita del portafoglio ottenuto fondendoli. Non è sempre vero che $VaR_\alpha^{(L)} \leq VaR_\alpha^{(L_1)} + VaR_\alpha^{(L_2)}$.
  - (ii) Il VaR non ci dà alcuna informazione sull'entità delle perdite che eccedono il VaR.

Expected Shortfall

- Una misura migliore è l'*Expected Shortfall* (*ES*).
- **Definizione.** Dato un livello di confidenza $\alpha \in (0, 1)$, *ES* al livello di confidenza α è il valore atteso delle perdite che eccedono il VaR_α:

$$ES_\alpha = E(X | X \geq VaR_\alpha).$$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si ha

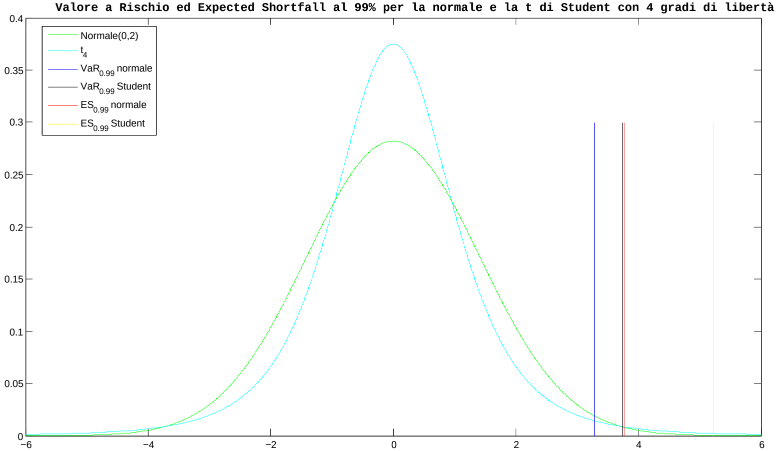
$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}.$$

- Per calcolare *ES* tramite simulazione Monte Carlo si procede come segue:
  (i) si simulano B osservazioni da F;
  (ii) si ordinano le osservazioni in senso crescente;
  (iv) si calcola il VaR;
  (iii) si calcola la media delle osservazioni maggiori del VaR.

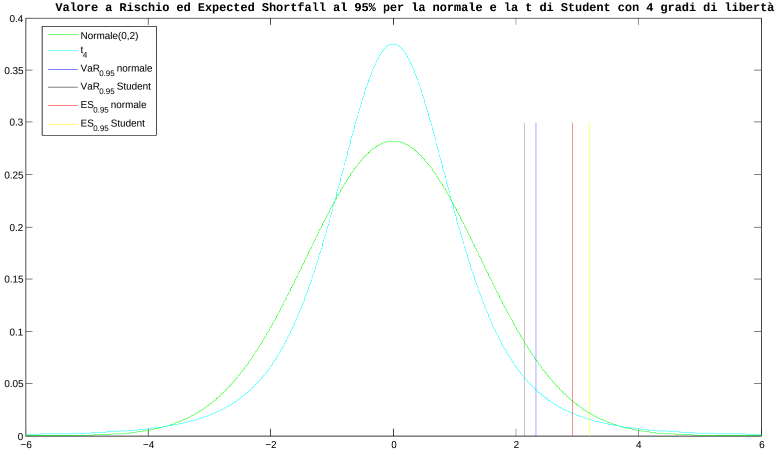
VaR ed Expected Shortfall

- Le figure illustrano le seguenti due proposizioni. Date due v.c. X_1 ed X_2 con curtosi rispettivamente pari a k_1 e k_2 con $k_1 > k_2$, si ha che:
  (1) se il livello di confidenza α è "sufficientemente alto", $VaR_\alpha^{X_1} > VaR_\alpha^{X_2}$ e $ES_\alpha^{X_1} > ES_\alpha^{X_2}$;
  (2) può accadere, per livelli di confidenza "non troppo alti", che
    (a) $VaR_\alpha^{X_1} < VaR_\alpha^{X_2}$ e $ES_\alpha^{X_1} > ES_\alpha^{X_2}$ o anche che
    (b) $VaR_\alpha^{X_1} < VaR_\alpha^{X_2}$ e $ES_\alpha^{X_1} < ES_\alpha^{X_2}$.
- La prima figura illustra il caso (1), la seconda figura è un esempio del caso (2a), la terza un esempio del caso (2b).

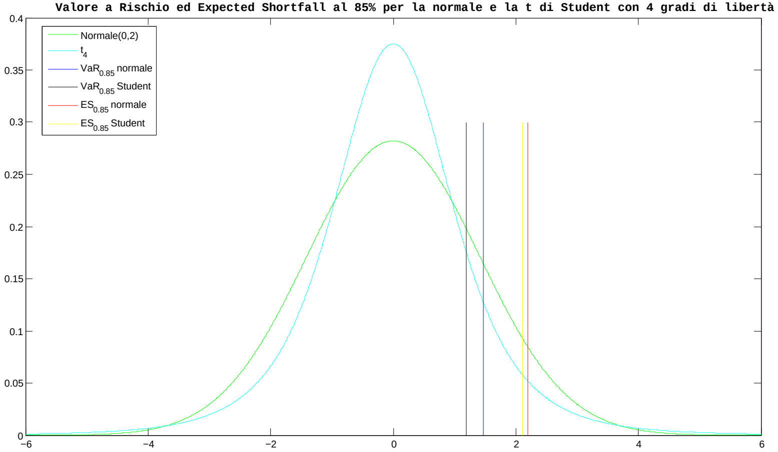
VaR ed Expected Shortfall



VaR ed Expected Shortfall



VaR ed Expected Shortfall



Metodi standard per il rischio di mercato

- Sono possibili fondamentalmente tre approcci al problema:

  (i) approccio parametrico;
  (ii) approccio non parametrico (simulazione storica);
  (iii) approccio Monte Carlo;

- Nell'approccio parametrico svolge un ruolo fondamentale l'ipotesi di normalità multivariata per i cambiamenti dei fattori di rischio: $\boldsymbol{X}_t \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. La densità normale multivariata è data da:

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-d/2}(\det(\boldsymbol{\Sigma}))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}.$$

- Si tratta dell'estensione della normale univariata al caso multidimensionale. La proprietà fondamentale per i nostri scopi è la seguente: qualsiasi combinazione lineare degli elementi di $\boldsymbol{X}$ ha distribuzione normale univariata: $Y = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i \sim N(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w})$.

L'approccio varianze-covarianze

- Si ipotizza $\boldsymbol{X}_{t+1} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Si ipotizza inoltre che la perdita linearizzata sia un'approssimazione sufficientemente accurata della distribuzione di perdita. L'operatore di perdita linearizzato ha la forma:

$$l_t^{\Delta}(\boldsymbol{x}) = -(c_t + \boldsymbol{b}_t'\boldsymbol{x})$$

  per qualche costante c_t e qualche vettore $\boldsymbol{b}_t$. Per esempio, nel caso del portafoglio azionario, $c_t = 0$ e $\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{w}_t$, i pesi del portafoglio.
- Poiché una funzione lineare di un vettore normale multivariato ha distribuzione normale univariata, ne segue che la perdita linearizzata L_{t+1}^{Δ} ha distribuzione normale univariata:

$$L_{t+1}^{\Delta} = l_t^{\Delta}(\boldsymbol{X}_{t+1}) \sim N(-c_t - \boldsymbol{b}_t'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{b}_t'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{b}_t).$$

L'approccio varianze-covarianze

- Il VaR di uno strumento il cui prezzo è P_t viene calcolato come
$$\Delta P_t = \theta \cdot \Delta S_t,$$
dove θ è un "coefficiente di sensitività" di P_t rispetto alla variazione di valore (ΔS_t) del fattore di rischio sottostante.
- Per esempio, per un'azione si tratta del parametro β, per un *bond* della *duration* modificata, per un'opzione del parametro Δ. I fattori di rischio sottostanti sono rispettivamente l'indice di mercato, la variazione del tasso di rendimento effettivo a scadenza e il prezzo del sottostante.
- In ultima analisi, il principale vantaggio del metodo è il fatto che la matrice $\mathbf{\Sigma}$ ha dimensioni ridotte, ed è quindi molto più agevole stimarla.

Duration e rischio

- Ricordiamo che la *duration* di un *bond* di prezzo P è definita come $D = (1/P)\sum_{t=1}^{T} t \cdot C_t/(1+y)^t$; in particolare si ha

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = -\frac{D}{1+y} \stackrel{\text{def}}{=} DM,$$

dove DM è la *duration* modificata.

- Si può dunque scrivere

$$\text{var}\left(\frac{dP}{P}\right) \approx DM^2 \cdot \text{var}(dy). \qquad (10)$$

- Si noti che la (10) si basa su un'approssimazione lineare (espansione di Taylor del primo ordine) della funzione prezzo-rendimento.

Il VaR di un BTP

- Vogliamo misurare il VaR giornaliero al 99% di una posizione su un BTP decennale con valore nominale di 100000 Euro, *duration* modificata pari a 6 e prezzo pari a 120 Euro, sapendo che la volatilità giornaliera del tasso decennale σ_F è pari allo 0.15%. Si ha

$$VaR_{0.99} = 2.326 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 0.0015 = 2.512.$$

- A rigore, nel caso dell'obbligazione con cedole, l'approccio parametrico (più accurato e complicato) prevede che la singola posizione obbligazionaria venga scomposta nelle relative componenti elementari, ognuna delle quali è legata, in termini di sensitività, alle variazioni di uno solo dei fattori di mercato considerati.
- Il rischio della posizione è determinato sulla base dei rischi delle singole componenti, aggregati per mezzo delle correlazioni tra i rendimenti dei fattori di mercato coinvolti.

Il VaR di un BTP

- La posizione in BTP viene prima scomposta nei singoli flussi di cassa (cedole più valore di rimborso) per poter prendere in considerazione la volatilità dei nodi della *term structure*.
- La modellizzazione utilizzata da *RiskMetrics* consiste nella scomposizione dello strumento in una serie di *cash flow*. Ogni *cash flow* è legato ad uno o più fattori di rischio. Il VaR dello strumento composto si può quindi calcolare trattando i singoli *cash flow* come singoli strumenti.
- Considerando uno strumento finanziario che comporta due *cash flow* di valore attuale uguale rispettivamente a 100 Euro dopo un mese e a 200 Euro due mesi dopo la data di calcolo del VaR, il rendimento atteso dello strumento finanziario composto (o del portafoglio) può essere calcolato nel modo seguente:

$$r = \frac{1}{3} r_{1m} + \frac{2}{3} r_{2m},$$

Il VaR di un BTP

- Il VaR dello strumento viene quindi calcolato come il VaR del portafoglio composto da due strumenti diversi, corrispondenti ai due *cash flow* distinti. Si ottiene

$$VaR = z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{9}\sigma_{1m}^2 + \frac{4}{9}\sigma_{2m}^2 + \frac{4}{9}\sigma_{1m}\sigma_{2m}\rho},$$

dove ρ è la correlazione tra il tasso ad un mese ed il tasso a due mesi e α è il livello di confidenza scelto.

Il VaR di un'azione

- Nell'approccio varianze-covarianze, il VaR di un'azione viene calcolato sulla base del CAPM come

$$VaR = z_\alpha \cdot \beta \cdot \sigma_M,$$

  dove σ_M è la volatilità dell'indice di mercato scelto per l'azione.
- In linea di principio, il VaR dell'azione andrebbe tuttavia calcolato come

$$VaR = z_\alpha \cdot \sigma,$$

  dove σ è la volatilità dell'azione stessa.

Il VaR di un'opzione

- Nonostante la funzione di prezzo (formula di B&S) sia fortemente non lineare, il VaR di un'opzione viene calcolato sulla base della *Delta approximation*:

$$VaR = z_\alpha \cdot \Delta \cdot \sigma_S,$$

  dove σ_S è la volatilità dei rendimenti del sottostante.
- Purtroppo l'utilizzo della *Delta-Gamma approximation* porta a consistenti complicazioni. Si ha infatti:

$$C_1 - C_0 \approx \Theta\Delta_t + \Delta(S_1 - S_0) + \frac{1}{2}\Gamma(S_1 - S_0)^2.$$

- Poiché una trasformazione non lineare di una v.c. normale non è normale, NON si può calcolare il VaR come

$$VaR_\alpha = \sqrt{\mathrm{var}\left(\Theta\Delta_t + \Delta(S_1 - S_0) + \frac{1}{2}\Gamma(S_1 - S_0)^2\right)} \cdot z_\alpha.$$

L'approccio varianze-covarianze

- Il VaR di portafoglio al livello di confidenza α è quindi il quantile α della normale di parametri $\mu = -c_t - \boldsymbol{b}_t'\boldsymbol{\mu}$ e $\sigma^2 = \boldsymbol{b}_t'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{b}_t$. Se si ipotizza $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$, il problema principale consiste nel decidere quali fattori di rischio utilizzare e nello stimare i coefficienti di sensitività $\boldsymbol{b}_t$ e la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$.
- Per un portafoglio contenente n_1 azioni, n_2 *bond* e n_3 opzioni, ipotizzando di utilizzare la (**??**) per calcolare il VaR del *bond*, si ha $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n_1}, DM_1, \ldots, DM_{n_2}, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n_3})'$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_M^2 & \mathrm{cov}(r_M, y) & \mathrm{cov}(r_M, S) \\ \mathrm{cov}(r_M, y) & \sigma_y^2 & \mathrm{cov}(y, S) \\ \mathrm{cov}(r_M, S) & \mathrm{cov}(y, S) & \sigma_S^2 \end{pmatrix}.$$

- In ultima analisi, il principale vantaggio del metodo è il fatto che la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ ha dimensioni ridotte, ed è quindi molto più agevole stimarla.