Note sui processi stocastici di prezzi e rendimenti

Marco Bee

29 febbraio 2008

Formula di Itô. Sia X_t un processo di Itô, vale a dire un processo del tipo

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \Leftrightarrow \int dX_t = \int a(X_t, t)dt + \int b(X_t, t)dW_t,$$

dove W_t è un moto browniano standard; sia $Y_t = f_t(X_t)$. Allora la formula di Itô garantisce che l'equazione differenziale stocastica che descrive il processo Y_t è la seguente:

$$dY_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial X}a + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f_t}{\partial X}bdW_t.$$

Si noti che se la funzione f non dipende dal tempo, cioè se $Y_t = f(X_t)$ $\forall t \in (0, T)$, la formula si semplifica come segue:

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial X}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}bdW_t. \tag{1}$$

Applicazione. Sia $X_t = \log(S_t)$ il moto browniano generalizzato, di parametri ν e σ^2, che descrive l'evoluzione temporale del logaritmo del prezzo:

$$dX_t = \nu dt + \sigma dW_t,$$

la cui soluzione, ottenuta per integrazione, è

$$X_t - X_0 = \nu t + \sigma W_t, \tag{2}$$

dove $W_t \sim N(0, t)$. Si noti che $X_t - X_0 = \log(S_t) - \log(S_0) = r_t$, vale a dire il rendimento logaritmico sull'orizzonte temporale $(0, t)$.

Il processo S_t costruito applicando la funzione esponenziale ad un moto browniano generalizzato è definito moto browniano geometrico. Si vuole ricavare l'equazione differenziale stocastica che descrive l'evoluzione temporale di S_t, nell'ipotesi che S_t sia un moto browniano geometrico $S_t = e^{X_t}$ e X_t un moto browniano generalizzato di parametri ν e σ^2. La funzione f nell'enunciato della formula di Itô è dunque la funzione esponenziale; inoltre si ha $a(X_t,t) = \nu$, $b(X_t,t) = \sigma$, $\partial f/\partial X = \partial^2 f/\partial X^2 = e^X$. Ne segue che

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}bdW_t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dS_t &= \left(\nu e^{X_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{X_t}\right)dt + \sigma e^{X_t}dW_t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dS_t &= \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dS_t}{S_t} &= \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \tag{3}$$

I parametri del moto browniano geometrico sono dunque $\mu = (\nu + \sigma^2/2)$ e σ^2. ∎

Si consideri che dalla (2), fissato $t^* \in (0,T)$, si ha:

$$\begin{aligned} &\log(S_{t^*}) - \log(S_0) = \nu t^* + \sigma W_{t^*} \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow \log(S_{t^*}) = \log(S_0) + \nu t^* + \sigma W_{t^*} \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow \log\left(\frac{S_{t^*}}{S_0}\right) = r_{t^*} = \nu t^* + \sigma W_{t^*}, \qquad W_{t^*} \sim N(0,t^*). \end{aligned} \tag{4}$$

Si noti che la parte a destra dell'uguale nella (4) è una v.c. normale di parametri $\log(S_0) + \nu$ e $\sigma^2 t^*$. Dunque

$$\log(S_{t^*}) \sim N\left(\log(S_0) + \nu t^*, \sigma^2 t^*\right).$$

e

$$\log(S_{t^*}) - \log(S_0) = \log\left(\frac{S_{t^*}}{S_0}\right) = r_{t^*} \sim N\left(\nu t^*, \sigma^2 t^*\right).$$

Dunque dall'ipotesi di moto browniano geometrico dei prezzi segue la normalità dei rendimenti logaritmici su qualsiasi orizzonte temporale.

Qual è la distribuzione di S_t per t fisso, quando S_t è definito dalla (3)? Per trovarla, si osservi che, per definizione, $S_t = e^{X_t}$. Sia $t^* \in (0,T)$, $\nu + \sigma^2/2 = \mu$, $Z \sim N(0,1)$ e supponiamo che S_0 sia una costante nota. Per la definizione di v.c. Lognormale, S_{t^*} ha distribuzione lognormale e il suo valore atteso è dato da

$$\begin{aligned} E(S_{t^*}) &= S_0 E(e^{\nu t^* + \sigma W_{t^*}}) = \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t^*} E(e^{\sigma W_{t^*}}) = \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t^*} E(e^{\sigma\sqrt{t^*}Z}) = \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t^*} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^*} = \\ &= S_0 e^{\mu t^*} = e^{\log(S_0) + \mu t^*}. \end{aligned}$$

Dunque S_{t^*} ha distribuzione lognormale di valore atteso $e^{\log(S_0)+ \ \nu+\frac{\sigma^2}{2} \ t^*}$. In maniera analoga si può dimostrare che

$$\mathrm{var}(S_{t^*}) = e^{2(\log(S_0)+\nu t^*)+\sigma^2 t^*}(e^{\sigma^2 t^*} - 1).$$

In conclusione, si ha che $S_{t^*} \sim \mathrm{Logn}(\log(S_0) + \nu t^*, \sigma^2 t^*)$.

Osservazione 1. Si supponga di conoscere la (3) e di voler determinare, a partire da essa, l'equazione differenziale stocastica soddisfatta dal processo $X_t = \log(S_t)$. Nella (3), si ponga $\nu + \sigma^2/2 = \mu$ e si applichi la formula di Itô per determinare l'equazione che descrive il processo $X_t = \log(S_t)$ (dunque ora la funzione f è la funzione logaritmo). Si verifica che si ottiene

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t = \nu dt + \sigma dW_t,$$

ovvero, come deve essere, la (1).

Osservazione 2. Nelle procedure di simulazione del moto browniano geometrico, generalmente si conoscono i parametri μ (definito nell'osservazione precedente) e σ^2 che caratterizzano il moto browniano geometrico del prezzo, S_t. D'altra parte, la metodologia standard di simulazione del moto browniano geometrico S_t si basa sui seguenti passi:

1. simulare il moto browniano generalizzato del logaritmo del prezzo, $X_t = \log(S_t)$;

2. calcolare $S_t = e^{X_t}$.

Bisogna dunque prestare attenzione, nella simulazione del moto browniano generalizzato X_t, a non utilizzare il parametro μ, ma i parametri $\nu = \mu - \sigma^2/2$ e σ^2.